Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

MATEMATICA SUPERIOR

2^{do} Parcial – 19/11/2012

Tema: 18

1a	1b	1c	2	3a	3b	3c	4a	4b	Nota Final
1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	

Para aprobar es necesario sumar por lo menos 6 p. Nota: n = p - 2. TIEMPO MAXIMO: 90 minutos

Ejercicio 1: Dada la ecuación: $e^x - 7 - 5x^2 - 25x = 0$

a) Indique la cantidad total de raíces reales y un intervalo de longitud 1 entre dos enteros **para cada una** de ellas. (No use calculadora graficadora)

b) Utilice la función $g(x) = \ln(7 + 5x^2 + 25x)$ para hallar la mayor raíz real por Punto Fijo, **con $\varepsilon < 10^{-3}$**

c) Indique la cantidad de iteraciones que serían suficientes si se la resolviera por Bisección **para lograr una** precisión de 10^{-7}

Ejercicio 2: Dado el sistema lineal: $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7x + 4y = 1 \end{cases}$

Si es posible, resuélvalo por el método de Gauss-Seidel de forma que converja a la **solución. Realice 4 iteraciones** partiendo de $X^o=(1\ ;\ -1)$ e indique una cota del error.

Ejercicio 3: Dada la siguiente tabla de datos:

x	-3	-1	0	3	5	7
y	-26	K	4	-2	54	214

a) Indique el valor de K, si existe, para que por todos los puntos dados pase un polinomio **de grado 3.**

b) Si K=10, indique el grado del polinomio de menor grado que pasa por todos los **puntos. (No halle el** polinomio)

c) Halle un valor aproximado de la derivada segunda en x=5. **Justifique la elección de la fórmula.**

Ejercicio 4: Dada la siguiente integral: $\int_0^2 \frac{\text{sen}(x)}{x}\,dx$

a) Indique justificando si al resolverla por Trapecios con cualquier h, el valor aproximado **obtenido es:**
i) mayor al exacto ii) igual al exacto iii) menor al exacto

b) Tomando h=0.25 resuelva por Simpson.

RESPUESTAS PARCIAL 2 TEMA 18

Ejercicio 1: Dada la ecuación: $e^x - 7 - 5x^2 - 25x = 0$

a) total: 3 raíces reales: (-5 ; -4) , (-1 ; 0) y (5 ; 6)

b) Usando $g(x) = \ln(7 + 5x^2 + 25x)$ converge a: 5.75803653

c) $2^{-n} < 10^{-7} \Rightarrow 10^7 < 2^n \Rightarrow n > 7/\log(2) \Rightarrow n > 23.253 \Rightarrow n=24$ es una cantidad suficiente.

Ejercicio 2: Primero hay que intercambiar las filas: $\begin{cases} 7x+4y=1 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

x	y
1	-1
0,71428571	-1,19047619
0,82312925	-1,11791383
0,78166505	-1,14555664
0,79746093	-1,13502604

$X^4 - X^3 = (0{,}01579589 , 0{,}01053059) \Rightarrow |X^4 - X^3| = 0{,}01579589$

Ejercicio 3: Dada la siguiente tabla de datos:

x	-3	-1	0	3	5	7
y	-26	K	4	-2	54	214

a) K= 6 para que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3.

0	4	-2	6	1
3	-2	28	13	
5	54	80		
7	214			

$p(x) = 4 -2x+6x(x-3)+x(x-3)(x-5) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4 \quad \wedge \quad p(-3)=-26 \Rightarrow p(-1) = 6 = K$

b) Si K=10, el polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos es de grado 5.

c) $f''(5) = (214 - 2(54) + (-2))/4 = 26$ fórmula central, es la mejor.

Ejercicio 4:

a) Trapecios da menor al exacto por ser f cóncava hacia abajo.

b) Con h = 0.25 A = 1,60541814

0	0	1
1	0,25	0,98961584
2	0,5	0,95885108
3	0,75	0,90885168
4	1	0,84147098
5	1,25	0,7591877
6	1,5	0,66499666
7	1,75	0,56227768
8	2	0,45464871

Tema 18

19-11-12

① Dada la ecuación $e^x - 7 - 5x^2 - 25x = 0$

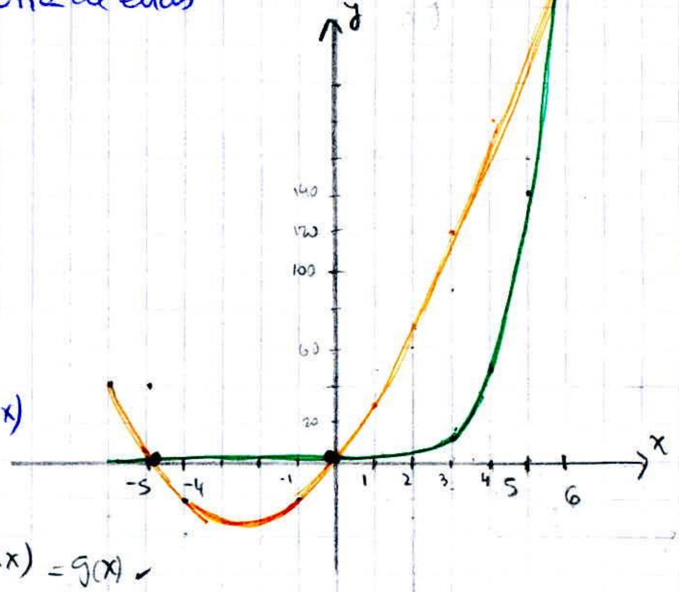
a) Indique la cantidad total de raíces reales y un intervalo de longitud 1 entre dos enteros para cada una de ellas

3 raíces: 1 en $[-5;-4]$

1 en $[-1;0]$

1 en $[5;6]$

$e^x - 7 = 5x(x+5)$



b) Utilice la función $g(x) = \ln(7+5x^2+25x)$ para hallar la mayor raíz real por Punto Fijo con $\varepsilon < 10^{-3}$

$e^x = 7+5x^2+25x \rightarrow x = \ln(7+5x^2+25x) = g(x)$

$x_0 = 5$
$x_1 = g(x_0) = 5{,}549076085$
$x_2 = g(x_1) = 5{,}702742364$
$x_3 = 5{,}743563644$
$x_4 = 5{,}754259$
$x_5 = 5{,}757051$
$x_6 = 5{,}75777$ $\} \ \varepsilon < 10^{-3}$

$\boxed{x = 5{,}757779658}$

c) Indique la cantidad de iteraciones que serían suficientes si se la resolviera por Bisección para lograr una precisión de 10^{-7}

$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2^n} \rightarrow \dfrac{1}{2^n} < 10^{-7} \rightarrow 10^7 < 2^n \rightarrow 7\log(10) < n\log(2)$

$\rightarrow \dfrac{7}{\log(2)} < n \rightarrow n > 23{,}25 \Rightarrow \boxed{n = 24}$

---

② Dado el sistema lineal $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 7x + 4y = 1 \end{cases}$

Si es posible, resuélvalo por el método de Gauss-Seidel de forma que converja a la solución. Realice 4 iteraciones partiendo de $X^0 = (1,-1)$ e indique una cota del error

Replanteo el sistema para que la matriz asociada sea diagonalmente dominante $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases} \rightarrow x^k = \dfrac{1-4y^{k-1}}{7}$; $y^k = \dfrac{-5+2x^k}{3}$

$X_0 = (1 \ ; -1)$
$X_1 = (5/7 \ ; -1{,}19047619)$
$X_2 = (0{,}823129 \ ; -1{,}117913832)$
$X_3 = (0{,}781665 \ ; -1{,}145556635)$
$X_4 = (0{,}797461 \ ; -1{,}13502604)$ $\} \ \| X_4 - X_3 \|_\infty = 0{,}015796 \rightarrow \varepsilon < 0{,}02$

③ Dada la sig. tabla de datos.

i	0	1	2	3	4	5
x	-3	-1	0	3	5	7
y	-26	k	4	-2	54	214

a) Indique el valor de k, si existe, para que por todos los puntos dados pase un polinomio de grado 3

x_i	$f(x_i)$			
-3	-26			
		10		
0	4		-2	
		-2		1
3	-2		6	
		28		
5	54			

$$p(x) = -26 + 10(x+3) - 2\underbrace{(x+3)x}_{(x^2+3x)} + \underbrace{(x^2+3x)(x-3)}_{x^3-9x}$$

$$\boxed{p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4}$$

$P(-3) = -26 \quad P(0) = 4 \quad P(3) = -2$

$P(5) = 54 \quad P(7) = 214$

$P(-1) = \boxed{k = 6}$

b) Si $k = 10$ indique el grado del polinomio de menor grado que pasa por todos los puntos (No halle el polinomio)

Si $k \neq 6 \rightarrow$ el polin. de menor grado es 5.

c) Halle un valor aproximado de la derivada segunda en $x = 5$. Justifique la elección de la fórmula.

Elijo la central porque da más precisión y tengo los valores para utilizarla

$$f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \Rightarrow f''(5) = \frac{f(7) - 2f(5) + f(3)}{2^2} = \frac{214 - 108 + (-2)}{4}$$

$$\boxed{f''(5) = 27}$$

---

④ Dada la sig. integral: $\int_0^2 \frac{sen(x)}{x}\,dx$.

a) Indique, justificando, si al resolverla por trapecios con cualquier h el valor aproximado es:

i) mayor al exacto ii) igual al exacto iii) menor al exacto

$$\varepsilon_T = \underbrace{\frac{a-b}{12}}_{<0} \cdot \underbrace{h^2}_{>0} f''(\varphi) \rightarrow \text{analizo el signo de } f''. \text{ Si } f''(x) < 0 \rightarrow A < I$$

$$\text{Si } f''(x) > 0 \rightarrow A > I$$

$$f(x) = \frac{sen(x)}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)x - sen(x)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{[-sen(x)x + \cancel{\cos(x)} - \cancel{\cos(x)}]x^2 - [\cos(x)x - sen(x)]x^2}{x^4} = \frac{-sen(x)x^3 - \cos(x)x^3 + sen(x)x^2}{x^4}$$

$$f''(x) < 0 \quad \forall x \in [0,2] \quad \therefore A < I$$

temal8

19-11-12

b) tomando $h=0{,}25$ resuelva por Simpson

$$n \cdot h = b-a \rightarrow n = \frac{2}{h} = \frac{2}{0{,}25} = 8 = n$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	0,25	0,989615837
2	0,5	0,9588510772
3	0,75	0,90885168
4	1	0,8414709848
5	1,25	0,7591876955
6	1,50	0,6649966577
7	1,75	0,5622776839
8	2	0,4546487134

$$A_s = \frac{h}{3}\left(E + 4I + 2P\right) =$$

0,25

$E = 1{,}4546487134$

$I = 3{,}219932896$

$P = 2{,}465318719$

$$\boxed{A_s = 1{,}605418145}$$